



**Práctica Calificada N° 1 de
Métodos Numéricos para Ecuaciones Diferenciales Parciales (CM 032 A)**

La práctica calificada comprende la entrega (formato report) y la exposición (formato beamer) de la resolución de los ejercicios siguientes. Fecha de entrega: lunes 13 de abril de 2026 a las 16 horas. Referencia: [2].

Aproximaciones de diferencias finitas

1. Un enfoque para derivar fórmulas de diferencias para aproximar derivadas es el método de coeficientes indeterminados. Supongamos que f es una función suave en \mathbb{R} . Sea $h > 0$. Determine los coeficientes a , b y c de modo que

$$af(x+h) + bf(x) + cf(x-h)$$

es una aproximación de $f'(x)$ con un orden como lo más alto posible; es decir, elija a , b y c tales que

$$|af(x+h) + bf(x) + cf(x-h) - f'(x)| \leq \mathcal{O}(h^p).$$

2. Haz el mismo problema del Ejercicio 1 con $f'(x)$ reemplazado por $f''(x)$.
3. ¿Es posible utilizar

$$af(x+h) + bf(x) + cf(x-h)$$

con coeficientes elegidos adecuadamente para aproximar $f'''(x)$? ¿Cuántos valores de función se necesitan para aproximar $f'''(x)$?

4. Para el problema del valor inicial de la ecuación de onda unidireccional

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x} + f & \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty). \\ u = f & \text{en } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (1)$$

Donde $a \in \mathbb{R}$ es una constante, deriva alguna diferencia esquemas basados en varias combinaciones de aproximaciones en diferencias de la derivada temporal y la derivada espacial.

5. La idea del esquema de Lax-Wendroff para resolver el problema del valor inicial (1) del Ejercicio 4 es el siguiente. Comience con la expansión de Taylor

$$u(x_j, t_{m+1}) \approx u(x_j, t_m) + h_t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_m) + \frac{h_t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_m). \quad (2)$$

De la ecuación diferencial tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x} + f$$

y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Utilice estas relaciones para reemplazar las derivadas del tiempo en el lado derecho de (2). Luego reemplace la primera y segunda derivadas espaciales por diferencias centrales. Finalmente, reemplace $\frac{\partial f}{\partial x}$ por una diferencia central y $\frac{\partial f}{\partial t}$ por una diferencia directa. Siga las instrucciones anteriores para derivar el esquema de Lax-Wendroff para resolver (1).

6. Dar esquemas hacia adelante, hacia atrás y Crank-Nicolson para el problema de valor inicial frontera

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, t) & \text{en } (0, a) \times (0, b) \times (0, T). \\ u = g_l & \text{en } \{0\} \times [0, b] \times [0, T]. \\ u = g_r & \text{en } \{a\} \times [0, b] \times [0, T]. \\ u = g_b & \text{en } [0, a] \times \{0\} \times [0, T]. \\ u = g_t & \text{en } [0, a] \times \{b\} \times [0, T]. \\ u = u_0 & \text{en } [0, a] \times [0, b] \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Aquí, para los datos dados, ν_1, ν_2, a, b, T son números positivos, y $f, g_l, g_r, g_b, g_t, u_0$ son funciones continuas de sus argumentos.

7. Considere el problema del valor inicial frontera de una ecuación hiperbólica

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) & \text{en } (0, a) \times (0, T). \\ u = g_1 & \text{en } \{0\} \times [0, T]. \\ u = g_2 & \text{en } \{a\} \times [0, T]. \\ u = u_0 & \text{en } [0, a] \times \{t = 0\}. \\ \frac{\partial u}{\partial t} = v_0 & \text{en } [0, a] \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Aquí, para los datos dados, ν, a, T son números positivos y f, g_1, g_2, u_0, v_0 son funciones continuas de sus argumentos. Analice cómo formar un esquema de diferencias finitas razonable para resolver el problema.

Teorema de equivalencia de Lax-Richtmyer

1. Demuestre que el subespacio

$$V_0 := \left\{ v \in V \mid v(x) = \sum_{j=1}^n a_j \text{sen}(jx), a_j \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

es denso en $V := \{v \in C([0, \pi]) \mid v(0) = v(\pi) = 0\}$.

2. Analice el esquema de Crank-Nicolson para el problema (3)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{en } [0, \pi] \times (0, T). \\ u = u_0 & \text{en } [0, \pi] \times \{t = 0\}. \\ u = 0 & \text{en } \{0, \pi\} \times [0, T]. \end{cases} \quad (3)$$

3. Considere el esquema hacia adelante para resolver el problema de muestra (3). Demuestre que $\|C(\Delta t)\| = |1 - 2r| + 2r$, y $r \leq \frac{1}{2}$ es una condición necesaria y suficiente para estabilidad y convergencia.

Más sobre convergencia y estabilidad

1. Sea $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ con $bc \geq 0$. Demuestre que los valores propios de la matriz

$$Q = \begin{bmatrix} a & c & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & c & \ddots & 0 \\ 0 & b & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & c \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

son

$$\lambda_j = a + 2\sqrt{bc} \cos\left(\frac{j\pi}{N+1}\right), \quad 1 \leq j \leq N.$$

Sugerencia: Para el caso no trivial $bc \neq 0$, escribe

$$Q = aI + \sqrt{bc}D^{-1}\Lambda D$$

con D es una matriz diagonal con elementos diagonales $\sqrt{\frac{c}{b}}, (\sqrt{\frac{c}{b}})^2, \dots, (\sqrt{\frac{c}{b}})^N$, y Λ es la matriz tridiagonal con ceros en la diagonal y unos en la superdiagonal y subdiagonal,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}.$$

Luego encuentre los valores propios de Λ siguiendo la definición del problema de valores propios y resolver un sistema de diferencias para componentes de vectores propios asociados. Un enfoque alternativo es relacionar la ecuación característica de Λ a través de su fórmula de recursividad a polinomios de Chebyshev del segundo tipo [1, pág. 447].

2. Proporcione un análisis de convergencia para el esquema de Crank-Nicolson para el problema (4)

$$\begin{cases} \frac{v_j^m - v_j^{m-1}}{h_t} = \nu \frac{(v_{j+1}^m - 2v_j^m + v_{j-1}^m) + (v_{j+1}^{m-1} - 2v_j^{m-1} + v_{j-1}^{m-1})}{2h_x^2} + f_j^{m-\frac{1}{2}}, & 1 \leq j \leq N_x - 1, 1 \leq m \leq N_t. \\ v_0^m = v_{N_x}^m = 0, & 0 \leq m \leq N_t. \\ v_j^0 = u_0(x_j), & 0 \leq j \leq N_x. \end{cases} \quad (4)$$

en norma $\|\cdot\|_{2,h_x}$ aplicando el siguiente Teorema 1, como se hace para los esquemas hacia adelante y hacia atrás en los ejemplos.

Teorema 1. Supongamos que el esquema (5) es consistente y estable.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{m+1} &= Q\mathbf{v}^m + h_t \mathbf{g}^m, \quad 0 \leq m \leq N_t - 1, \\ \mathbf{v}^0 &= \mathbf{u}_0. \end{aligned} \quad (5)$$

Entonces el método es convergente. Además, si la solución u es lo suficientemente suave como para que se cumpla

$$\sup_{m: mh_t \leq T} \|\boldsymbol{\tau}^m\| \leq c(h_x^{p_1} + h_t^{p_2}), \quad (6)$$

entonces tenemos la estimación del error

$$\sup_{m: mh_t \leq T} \|\mathbf{u}^m - \mathbf{v}^m\| \leq c(h_x^{p_1} + h_t^{p_2}).$$

3. Los esquemas hacia adelante, hacia atrás y Crank-Nicolson son casos particulares de una familia de esquemas de diferencias llamados métodos de punto medio generalizados. Sea $\theta \in [0, 1]$ un parámetro. Entonces, para el valor inicial / frontera

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) & \text{en } (0, \pi) \times (0, T). \\ u = 0 & \text{en } \{0, \pi\} \times (0, T). \\ u = u_0 & \text{en } (0, \pi) \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (7)$$

un esquema de punto medio generalizado es

$$\begin{cases} \frac{v_j^m - v_j^{m-1}}{h_t} = \nu \theta \frac{v_{j+1}^m - 2v_j^m + v_{j-1}^m}{h_x^2} + \nu (1 - \theta) \frac{v_{j+1}^{m-1} - 2v_j^{m-1} + v_{j-1}^{m-1}}{h_x^2} + \\ \theta f_j^m + (1 - \theta) f_j^{m-1}, & 1 \leq j \leq N_x - 1, 1 \leq m \leq N_t. \\ v_0^m = v_{N_x}^m = 0, & 0 \leq m \leq N_t. \\ v_j^0 = u_0(x_j), & 0 \leq j \leq N_x. \end{cases} \quad (8)$$

Demuestre que para $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$, el esquema es incondicionalmente estable en las normas $\|\cdot\|_{2,h_x}$ y $\|\cdot\|_\infty$; para $\theta \in [0, \frac{1}{2})$, el esquema es condicionalmente estable en la norma $\|\cdot\|_{2,h_x}$ si $2(1 - 2\theta)r \leq 1$, y este es condicionalmente estable en la norma $\|\cdot\|_\infty$ si $2(1 - \theta)r \leq 1$. Determinar los órdenes de convergencia de los esquemas.

Sugerencia de lectura adicional

Más detalles sobre el análisis teórico del método de diferencias finitas, por ejemplo, tratamiento de otro tipo de condiciones de frontera, dominios espaciales generales para problemas de dimensión espacial superior, aproximación de problemas hiperbólicos o elípticos, se pueden encontrar en varios libros sobre el tema, por ejemplo [8]. Para el método de diferencias finitas para problemas parabólicos, [9] es un análisis de encuesta en profundidad. Otro enfoque popular para desarrollar métodos de diferencias finitas para problemas parabólicos es el método de las líneas; vea [1, pág. 414] para una introducción que analiza algunos de los métodos de diferencias finitas de este capítulo. El libro [4] proporciona una cobertura completa de métodos de diferencias finitas de alto orden para EDPs dependientes del tiempo.

Para problemas de valor inicial / frontera de ecuaciones de evolución en alta dimensión espacial, la estabilidad de un esquema explícito generalmente requiere que el tamaño del paso de tiempo sea prohibitivamente pequeño. Por otro lado, algunos esquemas implícitos son incondicionalmente estables y el requisito de estabilidad no impone restricciones sobre el tamaño del paso temporal. La desventaja de un esquema implícito es que en cada nivel de tiempo es posible que necesitemos resolver un sistema algebraico de muy gran escala. La idea de la técnica de separación de operadores es dividir el cálculo de cada paso de tiempo en varios subpasos de modo que cada subpaso esté implícito solo en una variable espacial y al mismo tiempo se mantenga una buena propiedad de estabilidad. Los esquemas resultantes se denominan métodos de direcciones alternadas o métodos de pasos fraccionario. Véase [7, 10] para discusiones detalladas. Muchos fenómenos físicos se describen mediante leyes de conservación (conservación de masa, momento y energía). Los métodos de diferencias finitas para las leyes de conservación constituyen un área de investigación grande. El lector interesado puede vea [5] y [3].

Los métodos de extrapolación son medios eficientes para acelerar la convergencia de soluciones numéricas. Para métodos de extrapolación en el contexto del método de diferencias finitas, vea [6].

1. Investigue sobre uno de los métodos de investigación, explique su idea principal, y discuta sus ventajas y limitaciones. Algunos ejemplos de métodos de investigación incluyen:
 - Métodos de extrapolación para acelerar la convergencia de esquemas de diferencias finitas.
 - Métodos de direcciones alternadas para resolver problemas de valor inicial / frontera de ecuaciones de evolución en alta dimensión espacial.
 - Método multigrad para resolver sistemas lineales de gran escala que surgen de esquemas implícitos.
 - Métodos de preconditionamiento iterativo para resolver sistemas lineales de gran escala que surgen de esquemas implícitos.
 - Método de líneas para resolver problemas de valor inicial / frontera de ecuaciones de evolución.
 - Método de separación de operadores para resolver problemas de valor inicial / frontera de ecuaciones de evolución.

- Método de paso fraccionario para resolver problemas de valor inicial / frontera de ecuaciones de evolución.
- Método de diferencia finita para la ecuación de Burgers.

Referencias

- [1] Kendall Atkinson. *An Introduction to Numerical Analysis*. 2.^a ed. Wiley, 1991. ISBN: 9780471624899. URL: <https://www.rkmanr.org/uploads/Katkinson.pdf>.
- [2] Kendall Atkinson y Weimin Han. *Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework*. 3.^a ed. New York, NY: Springer New York, 2009. ISBN: 978-1-4419-0458-4. DOI: [10.1007/978-1-4419-0458-4](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0458-4). URL: <https://cm032.github.io/assets/books/Atkinson.pdf#page=266>.
- [3] Edwige Godlewski y Pierre-Arnaud Raviart. *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*. New York, NY: Springer New York, 2021. ISBN: 978-1-0716-1344-3. DOI: [10.1007/978-1-0716-1344-3](https://doi.org/10.1007/978-1-0716-1344-3).
- [4] *High Order Difference Methods for Time Dependent PDE*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008. ISBN: 978-3-540-74993-6. DOI: [10.1007/978-3-540-74993-6](https://doi.org/10.1007/978-3-540-74993-6).
- [5] Randall J. LeVeque. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Basel: Birkhäuser, 1992. ISBN: 978-3-7643-2723-1.
- [6] G. I. Marchuk y V. V. Shaidurov. *Difference Methods and Their Extrapolations*. New York, NY: Springer New York, 1983. ISBN: 978-1-4613-8224-9. DOI: [10.1007/978-1-4613-8224-9](https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8224-9).
- [7] G.I. Marchuk. "Splitting and alternating direction methods". En: vol. 1. Handbook of Numerical Analysis. Elsevier, 1990, págs. 197-462. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1570-8659\(05\)80035-3](https://doi.org/10.1016/S1570-8659(05)80035-3).
- [8] John C. Strikwerda. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations, Second Edition*. Society for Industrial y Applied Mathematics, 2004. DOI: [10.1137/1.9780898717938](https://doi.org/10.1137/1.9780898717938).
- [9] Vidar Thomée. "Finite difference methods for linear parabolic equations". En: vol. 1. Handbook of Numerical Analysis. Elsevier, 1990, págs. 5-196. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1570-8659\(05\)80034-1](https://doi.org/10.1016/S1570-8659(05)80034-1). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1570865905800341>.
- [10] N. N. Yanenko. *The Method of Fractional Steps: The Solution of Problems of Mathematical Physics in Several Variables*. Ed. por Maurice Holt. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1971. ISBN: 978-3-642-65108-3. DOI: [10.1007/978-3-642-65108-3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-65108-3).

Lima, 8 de abril de 2026.