Clase 2: Método de Diferencias Finitas

Métodos Numéricos para Ecuaciones Diferenciales Parciales CM032

Prof. Fidel Jara Huanca
Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Facultad de Ciencias

27 de marzo de 2026

Aproximaciones de diferencias finitas

Aproximaciones de diferencias finitas

El método numérico de diferencias finitas es universalmente aplicable para la solución de ecuaciones diferenciales.
La idea básica es aproximar los cocientes diferenciales por un cociente de diferencias apropiado, por lo tanto, reducimos una ecuación diferencial a un sistema algebraico.
Si $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es 4-veces diferenciable, $x \in \mathbb{R}$ y $h > 0$, entonces las siguientes aproximaciones de diferencias finitas son

Derivada	Orden de precisión	Aproximación de diferencia finita
$\frac{\partial u}{\partial x}$	1	$\frac{u_{i+1} - u_i}{h}$ o $\frac{u_i - u_{i-1}}{h}$
	2	$\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$
	4	$\frac{u_{i-2} - 8u_{i-1} + 8u_{i+1} - u_{i+2}}{12h}$
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	2	$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}$
	4	$\frac{-u_{i-2} + 16u_{i-1} - 30u_i + 16u_{i+1} - u_{i+2}}{12h^2}$
$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$	2	$\frac{-u_{i-2} + 2u_{i-1} - 2u_{i+1} + u_{i+2}}{2h^3}$
	4	$\frac{u_{i-3} - 8u_{i-2} + 13u_{i-1} - 13u_{i+1} + 8u_{i+2} - u_{i+3}}{8h^3}$
$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$	2	$\frac{u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2}}{h^4}$
	4	$\frac{-u_{i-3} + 12u_{i-2} - 39u_{i-1} + 56u_i - 39u_{i+1} + 12u_{i+2} - u_{i+3}}{6h^4}$

Aproximaciones de diferencias finitas

Ahora usemos estas fórmulas de diferencias para formular algunos esquemas de diferencias para un ejemplo de problema de valores iniciales y de contorno para una ecuación del calor.

Ejemplo

Considere el siguiente problema de valor inicial / frontera

$$
(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) & \text{en } (0,\pi) \times (0,T)\,. \\ u = 0 & \text{en } \{0,\pi\} \times (0,T)\,. \\ u = u_0 & \text{en } (0,\pi) \times \{t = 0\}\,. \end{cases}
$$

Aquí $\nu > 0$ es una constante dada, f y u_0 son funciones continuas.

Para desarrollar un método de diferencias finitas, necesitamos introducir puntos de cuadrícula. Sean N_x y N_t números enteros positivos, $h_x = \dfrac{\pi}{N_x}$, $h_t = \dfrac{T}{Nt}$ y definir los puntos de partición

$$
\begin{aligned}
x_j &= jh_x, \quad j = 0,1,\dots,N_x. \\
t_m &= mh_t, \quad j = 0,1,\dots,N_t.
\end{aligned}
$$

Un punto de la forma (x_j, t_m) se llama punto de cuadrícula y estamos interesados en calcular valores de solución aproximados en los puntos de la cuadrícula.

Aproximaciones de diferencias finitas

Usamos la notación v_j^m para una aproximación a $u_j^m \equiv u\left(x_j, t_m\right)$ calculado a partir de un esquema de diferencias finitas. Escribe $f_j^m = f\left(x_j, t_m\right)$ y $r = \dfrac{\nu h_t}{h_x^2}$. Entonces podemos incorporar varios esquemas. El primer esquema es

$$
\begin{cases}
\dfrac{v_j^{m+1} - v_j^m}{h_t} = \nu \dfrac{v_{j+1}^m - 2v_j^m + v_{j-1}^m}{h_x^2} + f_j^m, & 1 \le j \le N_x - 1, 0 \le m \le N_t - 1. \\
v_0^m = v_{N_x}^m = 0 & 0 \le m \le N_t. \\
v_j^0 = u_0\left(x_j\right), & 0 \le j \le N_x.
\end{cases}
\tag{2}
$$

Este esquema se obtiene discretizando la ecuación diferencial (1) en $x = x_j$ y $t = t_m$, reemplazando la derivada temporal con una diferencia directa y la segunda derivada espacial con una diferencia centrada de segundo orden. De ahí que se le llame esquema hacia adelante en tiempo y centrado en espacio. La ecuación de diferencias (2) se puede escribir como

$$
v_j^{m+1} = (1 - 2r)\, v_j^m + r\left(v_{j+1}^m + v_{j-1}^m\right) + h_t f_j^m, \quad 1 \le j \le N_x - 1, \quad 0 \le m \le N_t - 1.
$$

Por lo tanto, una vez que se calcula la solución en el nivel de tiempo $t = t_m$, la solución en el siguiente nivel de tiempo $t = t_{m+1}$ se puede encontrar explícitamente. El esquema hacia adelante (2) es un método explícito.

Aproximaciones de diferencias finitas

Alternativamente, podemos reemplazar la derivada temporal con una diferencia hacia atrás y todavía use la diferencia centrada de segundo orden para la segunda derivada espacial. El esquema resultante es un esquema hacia atrás en el tiempo de espacio centrado:

$$
\begin{cases}
\dfrac{v_j^m - v_j^{m-1}}{h_t} = \nu \dfrac{v_{j+1}^m - 2v_j^m + v_{j-1}^m}{h_x^2} + f_j^m, & 1 \leq j \leq N_x - 1, 0 \leq m \leq N_t - 1. \\
v_0^m = v_{N_x}^m = 0, & 0 \leq m \leq N_t. \\
v_j^0 = u_0\left(x_j\right), & 0 \leq j \leq N_x.
\end{cases} \tag{3}
$$

La ecuación en diferencias (3) se puede escribir como

$$
(1 + 2r)\, v_j^m - r\left(v_{j+1}^m + v_{j-1}^m\right) = v_j^{m-1} + h_t f_j^m, \quad 1 \leq j \leq N_x - 1, \quad 1 \leq m \leq N_t,
$$

que se complementa con la condición de frontera de (3). Por lo tanto, para encontrar la solución en el nivel de tiempo $t = t_m$ a partir de la solución en $t = t_{m-1}$, necesitamos resolver un sistema lineal tridiagonal de orden $N_x - 1$. El esquema hacia atrás (3) es un método implícito.

En los dos métodos anteriores, aproximamos la ecuación diferencial en $x = x_j$ y $t = t_m$. También podemos considerar la ecuación diferencial en $x = x_j$ y $t = t_{m-\frac{1}{2}}$, aproximando la derivada del tiempo por una diferencia centrada:

$$
\frac{\partial u}{\partial t}\left(x_j, t_{m-\frac{1}{2}}\right) \approx \frac{u\left(x_j, t_m\right) - u\left(x_j, t_{m-1}\right)}{h_t}.
$$

Aproximaciones de diferencias finitas

Además, aproxima la segunda derivada espacial por la diferencia centrada de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x_j, t_{m-\frac{1}{2}}\right) \approx \frac{u\left(x_j, t_m\right) - 2u\left(x_j, t_{m-\frac{1}{2}}\right) + u\left(x_j, t_{m-1}\right)}{h_x^2},$$

y luego aproximar los valores de mitades de tiempo medio por promedios:

$$u\left(x_j, t_{m-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left[u\left(x_j, t_m\right) + u\left(x_j, t_{m-1}\right)\right],$$

etc. Como resultado llegamos al esquema de Crank-Nicolson:

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{v_j^m - v_j^{m-1}}{h_t} = \nu \dfrac{\left(v_{j+1}^m - 2v_j^m + v_{j-1}^m\right) + \left(v_{j+1}^{m-1} - 2v_j^{m-1} + v_{j-1}^{m-1}\right)}{2h_x^2} + f_j^{m-\frac{1}{2}}, & 1 \leq j \leq N_x - 1, 1 \leq m \leq N_t. \\ v_0^m = v_{N_x}^m = 0, & 0 \leq m \leq N_t. \\ v_j^0 = u_0\left(x_j\right), & 0 \leq j \leq N_x. \end{cases}$$

Aquí $f_j^{m-\frac{1}{2}} = f\left(x_j, t_{m-\frac{1}{2}}\right)$, que puede ser reemplazado por $\left(f_j^m + f_j^{m-1}\right)/2$. La ecuación en diferencias (4) se puede reescribir como

$$(1+r)\, v_j^m - \frac{r}{2}\left(v_{j+1}^m + v_{j-1}^m\right) = (1-r)\, v_j^{m-1} + \frac{r}{2}\left(v_{j+1}^{m-1} + v_{j-1}^{m-1}\right) + h_t f_j^{m-\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq j \leq N_x - 1, \quad 1 \leq m \leq N_t,$$

Vemos que el esquema de Crank-Nicolson también es un método implícito y en cada paso de tiempo necesitamos resolver un sistema lineal tridiagonal de orden $N_x - 1$. Los tres esquemas derivados todos arriba parecen aproximaciones razonables para el problema de valor inicial frontera (1).

Algoritmo de Thomas

Algoritmo de Thomas

Considere un sistema lineal tridiagonal expresado en la forma $Ax = d$

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Este sistema lineal se convierte en forma triangular superior. $Ux = d'$ donde la diagonal principal solo contiene unos (1's).
Considere la fila 1 de la ecuación (5)

$$b_1x_1 + c_1x_2 = d_1.$$

Divida por b_1 para que la diagonal principal sea igual a 1:

$$x_1 + \frac{c_1}{b_1}x_2 = \frac{d_1}{b_1}.$$

Sea $c'_1 = \frac{c_1}{b_1}$ y $d'_1 = \frac{d_1}{b_1}$, entonces

$$x_1 + c'_1x_2 = d'_1.$$

Considere la fila 2 de la ecuación (5)

$$a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2.$$

Elimina x_1 usando a_2 multiplicado por la ecuación (5)

$$a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 - a_2\left(x_1 + c'_1x_2\right) = d_2 - a_2d'_1.$$
$$\left(b_2 - a_2c'_1\right)x_2 + c_2x_3 = d_2 - a_2d'_1.$$

Algoritmo de Thomas

Divida por $b_2 - a_2c_1'$ para que la diagonal principal elemento es igual a 1

$$x_2 + \frac{c_2}{b_2 - a_2c_1'}x_3 = \frac{d_2 - a_2d_1'}{b_2 - a_2c_1'}.$$

Sea $c_2' = \dfrac{c_2}{b_2 - a_2c_1'}$ y $d_2' = \dfrac{d_2 - a_2d_1'}{b_2 - a_2c_1'}$, entonces

$$x_2 + c_2'x_3 = d_2'.$$

Considere la fila 3 de la ecuación (5)

$$a_3x_2 + b_3x_3 + c_3x_4 = d_3.$$

Elimina x_2 usando a_3 multiplicado por la ecuación (5)

$$\begin{aligned} a_3x_2 + b_3x_3 + c_3x_4 - a_3\left(x_2 + c_2'x_3\right) &= d_3 - a_3d_2'. \\ \left(b_3 - a_3c_2'\right)x_3 + c_3x_4 &= d_3 - a_3d_2'. \end{aligned}$$

Divida por $b_3 - a_3c_2'$ para que la diagonal principal elemento es igual a 1

$$x_3 + \frac{c_3}{b_3 - a_3c_2'}x_4 = \frac{d_3 - a_3d_2'}{b_3 - a_3c_2'}.$$

Sea $c_3' = \dfrac{c_3}{b_3 - a_3c_2'}$ y $d_3' = \dfrac{d_3 - a_3d_2'}{b_3 - a_3c_2'}$, entonces

$$x_3 + c_3'x_4 = d_3'.$$

Algoritmo de Thomas

Considere la i-ésima fila de la ecuación (5). Usando un método similar al que se muestra para las filas 2 y 3 arriba, la i-ésima fila se puede escribir como

(6) $$x_i + c_i' x_{i+1} = d_i'.$$

Donde

$$c_i' = \frac{c_i}{b_i - a_i c_{i-1}'}.$$

$$d_i' = \frac{d_i - a_i d_{i-1}'}{b_i - a_i c_{i-1}'}.$$

Finalmente, considere la enésima fila de la ecuación (5)

$$a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_n.$$

Elimina x_{n-1} usando a_n multiplicado por la ecuación (6).

$$\begin{aligned} a_n x_{n-1} + b_n x_n - a_n \left(x_{n-1} + c_{n-1}' x_n\right) &= d_n - a_n d_{n-1}'. \\ \left(b_n - a_n c_{n-1}'\right) x_n &= d_n - a_n d_{n-1}'. \end{aligned}$$

Divida por $b_n - a_n c_{n-1}'$ para que el elemento de la diagonal principal sea igual a 1.

$$x_n = \frac{d_n - a_n d_{n-1}'}{b_n - a_n c_{n-1}'}.$$

En resumen, el sistema lineal tridiagonal (5) se convierte en forma triangular superior $Ux = d'$, donde U es una matriz tridiagonal con 1's en la diagonal principal, c_i''s en la diagonal superior y 0's en la diagonal inferior.

Algoritmo de Thomas

Los elementos de U y d' se calculan usando las siguientes fórmulas de recurrencia:

$$
\begin{aligned}
c'_1 &= \frac{c_1}{b_1}, \quad d'_1 = \frac{d_1}{b_1}, \\
c'_i &= \frac{c_i}{b_i - a_i c'_{i-1}}, \quad d'_i = \frac{d_i - a_i d'_{i-1}}{b_i - a_i c'_{i-1}}, \quad i = 2, 3, \dots, n.
\end{aligned}
$$

Una vez que el sistema está en forma triangular superior, podemos resolver x usando sustitución hacia atrás:

$$
\begin{aligned}
x_n &= d'_n, \\
x_i &= d'_i - c'_i x_{i+1}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1.
\end{aligned}
$$

La ecuación matricial ahora se puede expresar en la forma $Ux = d'$.

$$
\begin{bmatrix}
1 & c'_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & c'_2 & 0 & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & 1 & c'_3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & 0 & 0 & 1 & c'_{n-1} \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ \vdots \\ d'_{n-1} \\ d'_n \end{bmatrix}. \tag{7}
$$

Una vez que el sistema está escrito en forma triangular superior, la solución de x se puede encontrar mediante sustitución hacia atrás. Comenzando con la n-ésima fila de la ecuación (7) la solución para x_n es d'_n.

$$x_n = d'_n.$$

Considere la i-ésima fila de la ecuación (7) cuando $i = n-1, n-2, \dots, 1$:

$$x_i = d'_i - c'_i x_{i+1}.$$

Algoritmo de Thomas

El algoritmo de Thomas se escribe de la siguiente manera.

- Calcule los coeficientes modificados c' y d' usando las fórmulas de recurrencia.

$$\begin{cases} c_1' = \dfrac{c_1}{b_1}, \quad d_1' = \dfrac{d_1}{b_1}, \\ c_i' = \dfrac{c_i}{b_i - a_i c_{i-1}'}, \quad d_i' = \dfrac{d_i - a_i d_{i-1}'}{b_i - a_i c_{i-1}'}, \quad i = 2, 3, \dots, n. \end{cases}$$

- Calcule la solución x usando sustitución hacia atrás.

$$\begin{cases} x_n = d_n', \\ x_i = d_i' - c_i' x_{i+1}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1. \end{cases}$$

Referencias

- Libros

Kendall Atkinson y Weimin Han. *Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework*. New York, NY: Springer New York, 2009. ISBN: 978-1-4419-0458-4. DOI: `10.1007/978-1-4419-0458-4`.

Randall J. LeVeque. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. 1.ª ed. Seattle, Washington: Society for Industrial y Applied Mathematics, 2007. DOI: `10.1137/1.9780898717839`.

J. W. Thomas. *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. New York, NY: Springer New York, 1995. ISBN: 978-1-4899-7278-1. DOI: `10.1007/978-1-4899-7278-1`.

- Páginas web

Jon Shiach. *Numerical Methods for Partial Differential Equations II: Finite-Difference Methods*. URL: `https://jonshiach.github.io/files/notes/finite_difference_methods_notes.pdf` (visitado 21-06-2025).